Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

Ayudantía 13

Problema 1. En el sistema de cables de alta tensión se pueden encontrar voltajes de hasta 30000 V. Si esa diferencia de potencial se produce en cables de cobre ¿Cuál es la potencia que se genera por los cables suponiendo un largo de 30 km? ¿A cuántas casas se puede alimentar si se aproxima el consumo de una casa a 120 ampolletas de 10 W? (resistividad del cobre: $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ωm, área del alambre: 20 cm^2)

La potencia que se disipa en un conductor es:

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

La resistencia la obtenemos por

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega m \cdot 3 \cdot 10^4\ m}{2 \cdot 10^{-3}\ m} = 0{,}26\ \Omega$$

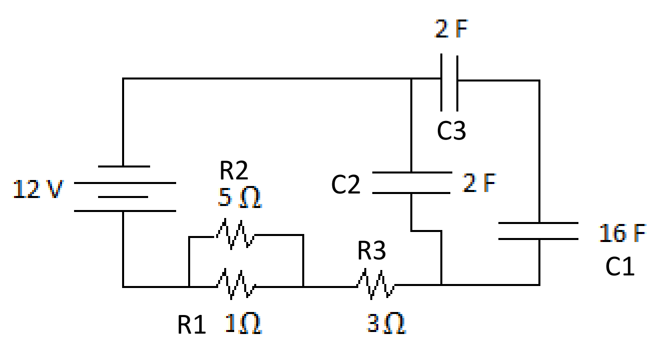
Por lo que la potencia es

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{3 \cdot 10^8\ V^2}{0{,}26\ \Omega} = 1{,}15 \cdot 10^9\ W$$

El número de casas es la razón entre la potencia total y la potencia de consumo de cada casa

$$\frac{P}{P_i} = \frac{1{,}15 \cdot 10^9\ W}{120\ W \cdot 10} = 9{,}85 \cdot 10^5\ casas$$

Problema 2. Considere el siguiente circuito



(a) Simplifique el circuito encontrando una capacitancia equivalente y una resistencia equivalente

(b) Encuentre la ecuación diferencial que describe la carga del capacitor para el circuito simplificado

(c) Encuentre la potencia como función del tiempo si inicialmente el capacitor estaba descargado

(a) Consideremos la resistencia equivalente $R4$ entre $R1$ y $R2$ que están en paralelo

$$\frac{1}{R4} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} = \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{5\Omega} = \frac{6}{5\Omega} \quad \Rightarrow \quad R4 = \frac{5}{6}\Omega$$

Ahora tenemos que $R4$ y $R3$ están en serie, por lo que la resistencia equivalente R es:

$$R = R4 + R3 = \frac{5}{6}\Omega + 3\Omega = \frac{23}{6}\Omega$$

Hacemos lo mismo con los capacitores. Consideramos un capacitor equivalente $C4$ dado por:

$$\frac{1}{C4} = \frac{1}{C1} + \frac{1}{C3} = \frac{1}{16\mathrm{F}} + \frac{1}{2F} = \frac{9}{16\mathrm{F}} \quad \Rightarrow \quad C4 = \frac{16}{9}\mathrm{F}$$

La capacitancia total está dada por las capacitancias en paralelo $C4$ y $C2$

$$C = C4 + C2 = \frac{16}{9}\mathrm{F} + 2\mathrm{F} = \frac{34}{9}\mathrm{F}$$

(b) Ahora tenemos un circuito con una batería, una resistencia y un capacitor.
Como la suma de las diferencias de potencial debe ser 0, tenemos:

$$\Delta V = \Delta V_R + \Delta V_C + \Delta V_R = 0$$

Los voltajes en la resistencia, la capacitancia y la batería son respectivamente:

$$\Delta V_R = IR$$
$$\Delta V_C = \frac{q}{C}$$
$$\Delta V_R = V$$

Reemplazando en la ecuación

$$IR + \frac{q}{C} - V = 0$$

Dividimos por R y usamos la definición de I, finalmente obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} - \frac{V}{R} = 0$$

(c) Si el último término de la ecuación diferencial lo multiplicamos y lo dividimos por la capacitancia C, y usamos que $Q_{max} = CV$ obtenemos

$$\frac{V}{R} = \frac{CV}{RC} = \frac{Q_{max}}{RC}$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} - \frac{Q_{max}}{RC} = \frac{dq}{dt} + \frac{q - Q_{max}}{RC} = 0$$

Resolvemos esa ecuación por separación

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q - Q_{max}}{RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{q - Q_{max}} = -\frac{dt}{RC}$$

Integrando obtenemos una constante de integración A

$$\ln(q - Q_{max}) = -\frac{t}{RC} + A$$

Tomando la exponencial

$$q - Q_{max} = A' e^{-t/RC}$$

Despejamos q

$$q_{(t)} = A' e^{-t/RC} + Q_{max}$$

Aplicamos la condición inicial $q_{(0)} = 0$

$$q_{(0)} = 0 = A' e^{-0/RC} + Q_{max} = A' + Q_{max} \quad \Rightarrow \quad A' = -Q_{max}$$

Finalmente obtenemos

$$q_{(t)} = -Q_{max} \cdot e^{-t/RC} + Q_{max}$$

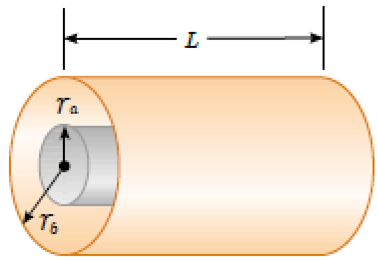
La intensidad de la corriente en función del tiempo se obtiene derivando la ecuación recién obtenidas

$$I_{(t)} = \frac{dq_{(t)}}{dt} = \frac{Q_{max}}{RC} e^{-t/RC}$$

Luego la potencia se obtiene por $P = I^2 R$

$$P_{(t)} = {I_{(t)}}^2 R = \frac{{Q_{max}}^2}{RC^2} e^{-2t/RC}$$

Problema 3. Sea un cable formado por dos cilindros conductores coaxiales muy largos y de radios r_a y $r_b > r_a$. La región entre ellos se encuentra llena de un material de conductividad variable, de la forma $\sigma = k/r$, en donde r es la distancia radial al eje del sistema. Encuentre la resistencia del cable, si se aplica una diferencia de potencial entre los conductores, asumiendo que la corriente fluye desde el cilindro interno al externo.



La resistencia está dada por

$$R = \frac{V}{I}$$

Pero la intensidad de la corriente

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Pero como $\vec{J} = \sigma\vec{E}$

$$I = \int \sigma\vec{E} \cdot d\vec{A}$$

El campo eléctrico lo obtenemos por gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 2\pi r L E = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{q}{2\pi r L \varepsilon_0}\hat{r}$$

Por simetría podemos considerar el campo eléctrico y la conductividad como constante en una superficie cilíndrica coaxial a los dos cilindros. Entonces:

$$I = \int \sigma\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{k}{r} \cdot \frac{q}{2\pi r L \varepsilon_0} \cdot 2\pi r L = \frac{kq}{r\varepsilon_0}$$

Por otra parte, el potencial por definición es:

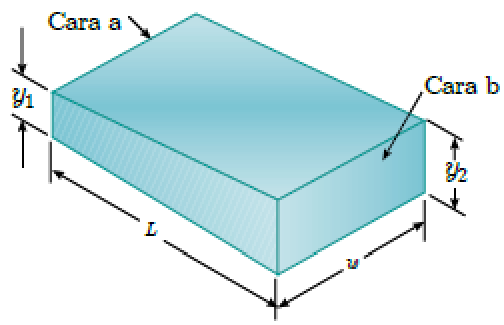
$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q}{2\pi r L \varepsilon_0}\hat{r} \cdot \hat{r}\, dl = \frac{q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)$$

Insertando los dos últimos resultados en la resistencia

$$R=\frac{V}{I}=\frac{q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)\cdot\frac{r\varepsilon_0}{kq}=\frac{r}{2\pi Lk}\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)$$

Problema 4. La cuña mostrada en la figura posee una resistividad uniforme. Demuestre que la resistencia entre las caras A y B de la cuña es:

$$R=\rho\frac{L}{w(y_2-y_1)}\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$



Por definición de resistencia

$$R=\frac{\rho L}{A}$$

Pero como la sección trasversal A va cambiando, consideramos el caso continuo, es decir, $L\rightarrow dx$ y $A\rightarrow A_{(x)}$ y por lo tanto

$$dR=\frac{\rho}{A_{(x)}}dx$$

Integramos

$$R=\rho\int_0^L\frac{1}{A_{(x)}}dx$$

Como el alto del bloque para cada x es una función lineal $\left(y_{(x)}=\frac{y_2-y_1}{L}x+y_1\right)$, el área (o sección transversal) a cada x es:

$$A_{(x)}=wy_{(x)}=w\left(\frac{y_2-y_1}{L}x+y_1\right)=\frac{w(y_2-y_1)}{L}x+wy_1$$

$$R=\rho\int_0^L\frac{1}{\frac{w(y_2-y_1)}{L}x+wy_1}dx$$

Hacemos un cambio de variable: $t = \frac{w(y_2 - y_1)}{L} x + w y_1$

$$R = \frac{\rho L}{w(y_2 - y_1)} \int_{w y_1}^{w y_2} \frac{1}{t} dt = \frac{\rho L}{w(y_2 - y_1)} \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

Problema 5. (a) De la definición de corriente eléctrica demuestre que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

(b) A partir de la definición de potencial eléctrico demuestre que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

(c) A partir de la ley de gauss para dieléctricos muestre que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad y \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

(a) De la corriente eléctrica

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Si consideramos un área cerrada y la definición de corriente $I = \frac{dq}{dt}$

$$-\frac{dq}{dt} = I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Pero la carga se puede escribir como una integral volumétrica de la densidad de carga

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Por teorema de la divergencia se tiene que

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, dV$$

Luego

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, dV = \int -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Como esa igualdad se cumple para todo volumen, necesariamente se debe tener que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

(b) Por potencial eléctrico tenemos

$$V = \int \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Si consideramos una línea cerrada

$$V = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

Por el teorema de Stoke tenemos

$$0 = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{A}$$

Como esa igualdad es válida para cualquier superficie, tenemos

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$$

(c) La ley de gauss para dieléctricos

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{A} = q_{libre}$$

Usando el teorema de la divergencia y la integral volumétrica para la carga

$$\int \rho_{libre}\, dV = q_{libre} = \oint \vec{D}\cdot d\vec{A} = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dV$$

Como la igualdad es válida para cualquier volumen, tenemos que:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{libre}$$

Si estamos en el vacío $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ y $\rho_{libre} = \rho$, entonces

$$\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$$

Finalmente

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$